La suficiencia de la equivalencia e independencia de las desigualdades de Cauchy-Buniakowski-Schwarz y de Bergström

por D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania
y Neculai Stanciu, Buzău, Romania

La desigualdad de H. Bergström:

Si $n \in N^* - \{1\}$, $x_k \in R$, $y_k \in R_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \tag{B}$$

La desigualdad de Cauchy-Buniakowski-Schwarz:

Si $n \in N^* - \{1\}$, $a_k \in R$, $b_k \in R$, $\forall k = \overline{1,n}$, entonces:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \tag{C-B-S}$$

1. Probaremos que es suficiente demostrar (B) sólo para $x_k, y_k \in R_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$.
Por tanto, suponemos que (B) se verifica para $x_k, y_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}$, y demostraremos que (B) se cumple para $x_k \in R$, $y_k \in R_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$.

a) Si $x_k \in R, \forall k = \overline{1,n}$, teniendo en cuenta que:

$$x^2 = (|x|)^2, \forall x \in R,$$

y

$$|x| + |y| \geq |x + y|, \forall x, y \in R.$$

entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{y_k} \overset{(B)}{\geq} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \geq \frac{\left(\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k},$$

luego (B) es cierta.

b) Si $x_k = 0, \forall k = \overline{1,n}$, tenemos: 0=0, que es cierto.

c) Si m $(m \in N^*, m < n)$ de los números $x_1, x_2, ..., x_n$ son nulos y el resto son no nulos, podemos suponer (sín pérdida de generalidad) que $x_1, x_2, ..., x_n \in R_+^*$, y $x_{m+1} = x_{m+2} = ... = x_n = 0$.
En este caso se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k^2}{y_k} \overset{(B)}{\geq} \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{m} y_k} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{m} y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k},$$

luego (B) queda probado también en este caso.

2. Probaremos que es suficiente demostrar (C-B-S) sólo para $a_k, b_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}$.
Supongamos que (C-B-S) se cumple para $a_k, b_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}$ y demostremos que (C-B-S) se cumple $\forall a_k, b_k \in R,\ k = \overline{1,n}$.

a) Si entre los números a_k, b_k algunos son negatives, entonces considerando que:

$$x^2 = (|x|)^2, \forall x \in R,$$

y

$$|x| + |y| \geq |x + y|, \forall x, y \in R,$$

deducimos que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |b_k|\right)^2 \overset{(C-B-S)}{\leq}$$

$$\overset{(C-B-S)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

lo que demuestra que (C-B-S) se cumple.

b) Si entre los números a_k, b_k algunos son nulos, sin pérdida de la generalidad suponemos que

$$a_k \in R_+^*, k = \overline{1,m},\ a_{m+1} = a_{m+2} = ... = a_n = 0,$$

y

$$b_k \in R_+^*, k = \overline{1,p},\ b_{p+1} = b_{p+2} = ... = b_n = 0, \text{ donde } 1 \leq p \leq m \leq n,$$

con lo cual:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k,$$

así que de aquí se obtiene:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right)^2 \overset{(C-B-S)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{p} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{p} b_k^2\right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{p} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Por lo tanto, cuando hablamos de la equivalencia entre las desigualdades (B) y (C-B-S) podemos suponer que $a_k, b_k, x_k, y_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}$.

A continuación, probaremos que:

$$\textbf{(B)} \Leftrightarrow \textbf{(C-B-S).}$$

Demostración.

$$\textbf{(B)} \Rightarrow \textbf{(C-B-S)}$$

Si en la desigualdad (B) tomamos $x_k = a_k b_k$ e $y_k = b_k^2, \forall k = \overline{1,n}$ obtenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 b_k^2}{b_k^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2,$$

es decir, **(C-B-S).**

$$\textbf{(C-B-S)} \Rightarrow \textbf{(B)}$$

Si en la desigualdad **(C-B-S)** tomamose $a_k = \sqrt{y_k}$ y $b_k = \dfrac{x_k}{\sqrt{y_k}}$ $\forall k = \overline{1,n}$ obtenemos que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{y_k} \cdot \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k}$$, es decir, **(B).**

Observación. Ya que (C-B-S) puede demostrarse independientemente de (B) y vice versa deducimos que (C-B-S) y (B) son mutuamente independientes.