ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

If $a, b, c > 0$ and $abc = 1$, then prove that $\forall\, n \in \mathbb{N}$, we have :

$$\frac{b(b^2-bc+c^2)^{3n}+a(a^2-ac+c^2)^{3n}}{c(a+b)}+\frac{b(a^2-ab+b^2)^{3n}+c(a^2-ac+c^2)^{3n}}{a(b+c)}$$
$$++\frac{a(a^2-ab+b^2)^{3n}+c(b^2-bc+c^2)^{3n}}{b(a+c)}\geq 3$$

Proposed by Zaza Mzhavanadze-Georgia

Solution by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

$$\sum_{cyc}\frac{b(a^2-ab+b^2)^{3n}+c(a^2-ac+c^2)^{3n}}{a(b+c)}\overset{A-G}{\geq}\sum_{cyc}\frac{b(ab)^{3n}+c(ac)^{3n}}{a(b+c)}$$
$$=\sum_{cyc}\left(\frac{a^{3n-1}}{b+c}.\left(b.b^{3n}+c.c^{3n}\right)\right)\overset{Chebyshev}{\geq}\sum_{cyc}\left(\frac{a^{3n-1}}{2(b+c)}.(b+c)\left(b^{3n}+c^{3n}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}.\sum_{cyc}a^{3n-1}.\left(b^{3n}+c^{3n}\right)\overset{A-G}{\geq}\frac{3}{2}.\sqrt[3]{(abc)^{3n-1}.\prod_{cyc}(b^{3n}+c^{3n})}$$
$$\overset{Cesaro}{\geq}\frac{3}{2}.\sqrt[3]{(abc)^{3n-1}.8(abc)^{3n}}\overset{abc=1}{=}\frac{3.2}{2}=3$$
$$\therefore \frac{b(b^2-bc+c^2)^{3n}+a(a^2-ac+c^2)^{3n}}{c(a+b)}+\frac{b(a^2-ab+b^2)^{3n}+c(a^2-ac+c^2)^{3n}}{a(b+c)}$$
$$+\frac{a(a^2-ab+b^2)^{3n}+c(b^2-bc+c^2)^{3n}}{b(a+c)}\geq 3\ \forall\, a,b,c>0 \,\middle|\, abc=1 \text{ and } \forall\, n\in\mathbb{N},$$
$$''='' \text{ iff } a=b=c=1 \text{ (QED)}$$