ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

If $a, \mathrm{b}, \mathrm{c} > 0$ and $a\mathrm{bc} = 1$, then prove that :

$$\frac{a(\mathrm{b}+\mathrm{c})}{\mathrm{b}^2.\sqrt{a\mathrm{c}}+\mathrm{bc}.\sqrt{\mathrm{bc}}}+\frac{\mathrm{b}(\mathrm{c}+a)}{\mathrm{c}^2.\sqrt{a\mathrm{b}}+\mathrm{c}a.\sqrt{\mathrm{c}a}}+\frac{\mathrm{c}(a+\mathrm{b})}{a^2.\sqrt{\mathrm{bc}}+a\mathrm{b}.\sqrt{a\mathrm{b}}}\ge 3$$

Proposed by Zaza Mzhavanadze-Georgia

Solution by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

$$\frac{a(\mathrm{b}+\mathrm{c})}{\mathrm{b}^2.\sqrt{a\mathrm{c}}+\mathrm{bc}.\sqrt{\mathrm{bc}}}+\frac{\mathrm{b}(\mathrm{c}+a)}{\mathrm{c}^2.\sqrt{a\mathrm{b}}+\mathrm{c}a.\sqrt{\mathrm{c}a}}+\frac{\mathrm{c}(a+\mathrm{b})}{a^2.\sqrt{\mathrm{bc}}+a\mathrm{b}.\sqrt{a\mathrm{b}}}$$

$$=\frac{a(\mathrm{b}+\mathrm{c})}{\mathrm{b}.\sqrt{\mathrm{bc}}\left(\sqrt{a\mathrm{b}}+\mathrm{c}\right)}+\frac{\mathrm{b}(\mathrm{c}+a)}{\mathrm{c}.\sqrt{\mathrm{c}a}\left(\sqrt{\mathrm{bc}}+a\right)}+\frac{\mathrm{c}(a+\mathrm{b})}{a.\sqrt{a\mathrm{b}}\left(\sqrt{\mathrm{c}a}+\mathrm{b}\right)}$$

$$\overset{a\mathrm{bc}=1}{=}\frac{a\sqrt{a}(\mathrm{b}+\mathrm{c})}{\mathrm{b}\left(\sqrt{a\mathrm{b}}+\sqrt{\mathrm{c}}.\sqrt{\mathrm{c}}\right)}+\frac{\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{b}}(\mathrm{c}+a)}{\mathrm{c}\left(\sqrt{\mathrm{bc}}+\sqrt{a}.\sqrt{a}\right)}+\frac{\mathrm{c}\sqrt{\mathrm{c}}(a+\mathrm{b})}{a\left(\sqrt{\mathrm{c}a}+\sqrt{\mathrm{b}}.\sqrt{\mathrm{b}}\right)}$$

$$\overset{\mathrm{CBS}}{\ge}\frac{a\sqrt{a}(\mathrm{b}+\mathrm{c})}{\mathrm{b}\left(\sqrt{\mathrm{c}+a}.\sqrt{\mathrm{b}+\mathrm{c}}\right)}+\frac{\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{b}}(\mathrm{c}+a)}{\mathrm{c}\left(\sqrt{a+\mathrm{b}}.\sqrt{\mathrm{c}+a}\right)}+\frac{\mathrm{c}\sqrt{\mathrm{c}}(a+\mathrm{b})}{a\left(\sqrt{\mathrm{b}+\mathrm{c}}.\sqrt{a+\mathrm{b}}\right)}$$

$$=\frac{a\sqrt{a}.\sqrt{\mathrm{b}+\mathrm{c}}}{\mathrm{b}.\sqrt{\mathrm{c}+a}}+\frac{\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{b}}.\sqrt{\mathrm{c}+a}}{\mathrm{c}.\sqrt{a+\mathrm{b}}}+\frac{\mathrm{c}\sqrt{\mathrm{c}}.\sqrt{a+\mathrm{b}}}{a.\sqrt{\mathrm{b}+\mathrm{c}}}$$

$$\overset{A-G}{\ge}3.\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{a}.\sqrt{\mathrm{b}+\mathrm{c}}}{\mathrm{b}.\sqrt{\mathrm{c}+a}}.\frac{\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{b}}.\sqrt{\mathrm{c}+a}}{\mathrm{c}.\sqrt{a+\mathrm{b}}}.\frac{\mathrm{c}\sqrt{\mathrm{c}}.\sqrt{a+\mathrm{b}}}{a.\sqrt{\mathrm{b}+\mathrm{c}}}}=3.\sqrt[3]{\sqrt{a\mathrm{bc}}}\overset{a\mathrm{bc}=1}{=}3$$

$$\therefore\frac{a(\mathrm{b}+\mathrm{c})}{\mathrm{b}^2.\sqrt{a\mathrm{c}}+\mathrm{bc}.\sqrt{\mathrm{bc}}}+\frac{\mathrm{b}(\mathrm{c}+a)}{\mathrm{c}^2.\sqrt{a\mathrm{b}}+\mathrm{c}a.\sqrt{\mathrm{c}a}}+\frac{\mathrm{c}(a+\mathrm{b})}{a^2.\sqrt{\mathrm{bc}}+a\mathrm{b}.\sqrt{a\mathrm{b}}}\ge 3$$

$$\forall\, a,\mathrm{b},\mathrm{c}>0\,\big|\,a\mathrm{bc}=1, ''='' \text{ iff } a=\mathrm{b}=\mathrm{c}=1\ (\mathrm{QED})$$