ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

If $a, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$ and $a\mathrm{b}(a^3+\mathrm{b}^3)=2$, then prove that :

$$a^2+\mathrm{b}^2 \geq 2$$

Proposed by Nguyen Hung Cuong-Vietnam

Solution by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

$$a^2+\mathrm{b}^2 \geq 2 \Leftrightarrow (a^2+\mathrm{b}^2)^5 \geq 32 \overset{4=\left(a\mathrm{b}(a^3+\mathrm{b}^3)\right)^2}{=} 8\left(a\mathrm{b}(a^3+\mathrm{b}^3)\right)^2$$
$$= 8a^2\mathrm{b}^2(a+\mathrm{b})^2(a^2+\mathrm{b}^2-a\mathrm{b})^2 = 8a^2\mathrm{b}^2(a^2+\mathrm{b}^2+2a\mathrm{b})(a^2+\mathrm{b}^2-a\mathrm{b})^2$$
$$\Leftrightarrow x^5 \geq 8\mathrm{y}^2(x+2\mathrm{y})(x-\mathrm{y})^2 \ (x=a^2+\mathrm{b}^2, \mathrm{y}=a\mathrm{b})$$
$$\Leftrightarrow x^5-8x^3\mathrm{y}^2+24x\mathrm{y}^4-16\mathrm{y}^5 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^5-2x^4\mathrm{y}+2x^4\mathrm{y}-4x^3\mathrm{y}^2-4x^3\mathrm{y}^2+8x^2\mathrm{y}^3-8x^2\mathrm{y}^3$$
$$+16x\mathrm{y}^4+8x\mathrm{y}^4-16\mathrm{y}^5 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x^4(x-2\mathrm{y})+2x^3\mathrm{y}(x-2\mathrm{y})-4x^2\mathrm{y}^2(x-2\mathrm{y})-8x\mathrm{y}^3(x-2\mathrm{y})+8\mathrm{y}^4(x-2\mathrm{y}) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2\mathrm{y})(x^4+2x^3\mathrm{y}-4x^2\mathrm{y}^2-8x\mathrm{y}^3+8\mathrm{y}^4) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2\mathrm{y})(x(x-2\mathrm{y})(x^2+4x\mathrm{y}+4\mathrm{y}^2)+8\mathrm{y}^4) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a^2+\mathrm{b}^2-2a\mathrm{b})\left((a^2+\mathrm{b}^2)(a^2+\mathrm{b}^2-2a\mathrm{b})\mathrm{b}^2(a^2+\mathrm{b}^2+2a\mathrm{b})^2+8a^4\mathrm{b}^4\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-\mathrm{b})^2\left((a^2+\mathrm{b}^2)(a-\mathrm{b})^2(a+\mathrm{b})^4+8a^4\mathrm{b}^4\right) \geq 0 \rightarrow \text{true} \ \forall a, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$$

$$\therefore a^2+\mathrm{b}^2 \geq 2 \ \forall a, \mathrm{b} \in \mathbb{R} \,\Big|\, a\mathrm{b}(a^3+\mathrm{b}^3)=2, '' ='' \ \text{iff } a=\mathrm{b}=1 \ (\text{QED})$$