ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

If $a,\mathrm{b}\in\mathbb{R}$ and $a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}=3(a+\mathrm{b})$, then prove that :

$$a^3+\mathrm{b}^3\le 27$$

Proposed by Nguyen Hung Cuong-Vietnam

Solution by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

If $a=0$, then : $\mathrm{b}^2=3\mathrm{b}\Rightarrow\mathrm{b}=0$ or $\mathrm{b}=3$; similarly, if $\mathrm{b}=0$, then : $a^2=3a\Rightarrow a=0$ or $a=3$. So, if $(a,\mathrm{b})=(0,0)$ or $(0,3)$ or $(3,0)$, we see that : $a^3+\mathrm{b}^3\le 27$ is true, $''=''$ iff $(a=3,\mathrm{b}=0)$ or $(a=0,\mathrm{b}=3)$ and we now shift our attention to : $a\ne 0,\mathrm{b}\ne 0$ … then : $a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}=$

$$\mathrm{b}^2(\mathrm{t}^2+\mathrm{t}+1)\ \left(\mathrm{t}=\frac{a}{\mathrm{b}}\right)=\mathrm{b}^2\left(\left(\mathrm{t}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\ge\frac{3\mathrm{b}^2}{4}>0\ (\because \mathrm{b}\ne 0)$$

$$\Rightarrow 3(a+\mathrm{b})=a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}>0\ \therefore\ a^3+\mathrm{b}^3\le 27\overset{\because a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}=3(a+\mathrm{b})}{\Longleftrightarrow}$$

$$a^3+\mathrm{b}^3\le\left(\frac{a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}}{a+\mathrm{b}}\right)^3\Leftrightarrow(a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b})^3\ge(a^3+\mathrm{b}^3)(a+\mathrm{b})^3$$

$$\left(\begin{matrix}\because a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}>0\text{ and}\\ a+\mathrm{b}>0\end{matrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow(a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b})^3\ge(a^2+\mathrm{b}^2-a\mathrm{b})(a+\mathrm{b})^4=(a^2+\mathrm{b}^2-a\mathrm{b})(a^2+\mathrm{b}^2+2a\mathrm{b})^2$$

$$\Leftrightarrow(x+\mathrm{y})^3\ge(x-\mathrm{y})(x+2\mathrm{y})^2\Leftrightarrow\mathrm{y}^2(3x+5\mathrm{y})\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2\mathrm{b}^2(3a^2+3\mathrm{b}^2+5a\mathrm{b})\ge 0\Leftrightarrow a^2\mathrm{b}^4(3\mathrm{t}^2+5\mathrm{t}+3)\ge 0\ \left(\begin{matrix}x=a^2+\mathrm{b}^2\text{ and}\\ \mathrm{y}=a\mathrm{b}\end{matrix}\right)$$

$\rightarrow$ true (strict inequality) $\because a^2\mathrm{b}^4>0\ (\because a,\mathrm{b}\ne 0)$ and discriminant of $3\mathrm{t}^2+5\mathrm{t}+3-25-36<0\Rightarrow 3\mathrm{t}^2+5\mathrm{t}+3>0\ \therefore\ a^3+\mathrm{b}^3<27$ for $a\ne 0,\mathrm{b}\ne 0$ and combining all cases, $a^3+\mathrm{b}^3\le 27\ \forall\, a,\mathrm{b}\in\mathbb{R}\,\middle|\,a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}=3(a+\mathrm{b})$, $''=''$ iff $(a=3,\mathrm{b}=0)$ or $(a=0,\mathrm{b}=3)$ (QED)