ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

If $a+\mathrm{b}\neq 0$, then :

$$|a|+|\mathrm{b}|+\left|\frac{3-a\mathrm{b}}{a+\mathrm{b}}\right|\geq 3$$

Proposed by Nguyen Hung Cuong-Vietnam

Solution by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

Via triangle inequality, $\forall\, a,\mathrm{b}\in\mathbb{C}\,\big|\, a+\mathrm{b}\neq 0$, we have :

$$|a|+|\mathrm{b}|+\left|\frac{3-a\mathrm{b}}{a+\mathrm{b}}\right|\geq\left|a+\mathrm{b}+\frac{3-a\mathrm{b}}{a+\mathrm{b}}\right|\overset{?}{\geq}3\Leftrightarrow\left|(a+\mathrm{b})^2+3-a\mathrm{b}\right|\overset{?}{\geq}3|a+\mathrm{b}|$$

$$\Leftrightarrow\left|a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}+3\right|\underbrace{\overset{?}{\geq}}_{(*)}3|a+\mathrm{b}|$$

$$\text{Now, } a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}+3\geq\frac{3}{4}(a+\mathrm{b})^2+3\geq 3>0\ \forall\, a,\mathrm{b}\in\mathbb{R}\,\big|\, a+\mathrm{b}\neq 0$$

$$\therefore\left|a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}+3\right|=a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b}+3\geq\frac{3}{4}(a+\mathrm{b})^2+3\overset{?}{\geq}3|a+\mathrm{b}|$$

$$\Leftrightarrow|a+\mathrm{b}|^2+4\overset{?}{\geq}4|a+\mathrm{b}|\Leftrightarrow(|a+\mathrm{b}|-2)^2\overset{?}{\geq}0\to\text{true}\Rightarrow(*)\text{ is true}$$

$$\forall\, a,\mathrm{b}\in\mathbb{R}\,\big|\, a+\mathrm{b}\neq 0\ \therefore\ |a|+|\mathrm{b}|+\left|\frac{3-a\mathrm{b}}{a+\mathrm{b}}\right|\geq 3\ \forall\, a,\mathrm{b}\in\mathbb{R}\,\big|\, a+\mathrm{b}\neq 0,$$

$$''=''\ \text{ iff } (a=\mathrm{b}=1)\text{ or }(a=\mathrm{b}=-1)\ (\text{QED})$$