ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE

If $a, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in [0,4]$ and $a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=6$, then prove that :

$$a^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a \le 28$$

Proposed by Nguyen Hung Cuong-Vietnam

Solution by Soumava Chakraborty-Kolkata-India

$\boxed{\text{Case 1}}$ $\mathrm{b} \ge 2$ $(\mathrm{b} \le 4)$ and then : $a^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a$

$$= \mathrm{b}(\mathrm{b}+a+\mathrm{c})+a^2+\mathrm{c}^2+\mathrm{c}a \overset{a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=6}{=} 6\mathrm{b}+(\mathrm{c}+a)^2-\mathrm{c}a \overset{a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=6}{=}$$

$$6\mathrm{b}+(6-\mathrm{b})^2-\mathrm{c}a \overset{-\mathrm{c}a \le 0}{\le} \mathrm{b}^2-6\mathrm{b}+36 = 28+\mathrm{b}^2-6\mathrm{b}+8$$

$$= 28+(\mathrm{b}-2)(\mathrm{b}-4) \le 28 \because 2 \le \mathrm{b} \le 4 \Rightarrow (\mathrm{b}-2)(\mathrm{b}-4) \le 0$$

$$\therefore a^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a \le 28$$

$\boxed{\text{Case 2}}$ $\mathrm{b} \le 2$ $(\mathrm{b} \ge 0)$ and if $\mathrm{c}, a < 2$, then : $\mathrm{c}+a < 4 \overset{a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=6}{\Rightarrow} 6-\mathrm{b} < 4$
$\Rightarrow \mathrm{b} > 2$, a contradiction $\therefore$ when $\mathrm{b} \le 2$, then, at least one of c, a must be ≥ 2

• When $a \ge 2$ $(a \le 4)$, then : $a^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a = a(a+\mathrm{b}+\mathrm{c})$
$+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+\mathrm{bc} \overset{a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=6}{=} 6a+(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{bc} \overset{a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=6}{=} 6a+(6-a)^2-\mathrm{bc}$
$\overset{-\mathrm{bc} \le 0}{\le} a^2-6a+36 = 28+a^2-6a+8 = 28+(a-2)(a-4) \le 28 \because 2 \le a \le 4$
$\Rightarrow (a-2)(a-4) \le 0 \therefore a^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a \le 28$

• When $\mathrm{c} \ge 2$ $(\mathrm{c} \le 4)$, then : $a^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a = \mathrm{c}(\mathrm{c}+\mathrm{b}+a)$
$+a^2+\mathrm{b}^2+a\mathrm{b} \overset{a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=6}{=} 6\mathrm{c}+(a+\mathrm{b})^2-a\mathrm{b} \overset{a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=6}{=} 6\mathrm{c}+(6-\mathrm{c})^2-a\mathrm{b}$
$\overset{-a\mathrm{b} \le 0}{\le} \mathrm{c}^2-6\mathrm{c}+36 = 28+\mathrm{c}^2-6\mathrm{c}+8 = 28+(\mathrm{c}-2)(\mathrm{c}-4) \le 28 \because 2 \le \mathrm{c} \le 4$

$\Rightarrow (\mathrm{c}-2)(\mathrm{c}-4) \le 0 \therefore a^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a \le 28$ and so,
combining *all* scenarios, $a^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+a\mathrm{b}+\mathrm{bc}+\mathrm{c}a \le 28$

$$\forall\, a, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in [0,4] \,\big|\, a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=6, '' ='' \text{ iff } (a=0, \mathrm{b}=2, \mathrm{c}=4)$$

$$\text{or } (a=0, \mathrm{b}=4, \mathrm{c}=2) \text{ or } (\mathrm{b}=0, \mathrm{c}=2, a=4) \text{ or } (\mathrm{b}=0, \mathrm{c}=4, a=2)$$

$$\text{or } (\mathrm{c}=0, a=2, \mathrm{b}=4) \text{ or } (\mathrm{c}=0, a=4, \mathrm{b}=2) \text{ (QED)}$$