PROPOSED PROBLEM

DANIEL SITARU - ROMANIA

Find $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ such that:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x = \tan y \\ \frac{3\sin^3 y\cos y}{\sin^4 y + \cos^2 y} = \tan z \\ \frac{4\sin^4 z + \cos^2 z}{\sin^4 z + \cos^4 z} = \tan x \end{cases}$$

Solution 1 by proposer.

$$\tan y = 2\sin^2 x = \frac{2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2\tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \overset{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{2\tan^2 x}{2\tan x} = \tan x$$

$$\tan y \leq \tan x \Rightarrow y \leq x \tag{1}$$

$$\tan z = \frac{3\sin^3 y\cos y}{\sin^4 y + \cos^2 y} = \frac{3\tan^3 y\cos^4 y}{\sin^4 y + \cos^2 y} = \frac{3\tan^3 y}{\tan^4 y + \frac{1}{\cos^2 y}} =$$

$$= \frac{3\tan^3 y}{\tan^4 y + \tan^2 y + 1} \overset{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{3\tan^3 y}{3\sqrt[3]{\tan^6 y}} = \frac{3\tan^3 y}{3\tan^2 y} = \tan y$$

$$\tan z = \tan y \Rightarrow z \leq y \tag{2}$$

$$\tan x = \frac{4\sin^4 z\cos^2 z}{\sin^4 z + \cos^4 z} = \frac{4\tan^4 z}{\frac{1}{\cos^2 z}(\frac{\sin^4 z}{\cos^4 z} + 1)} = \frac{4\tan^4 z}{(\tan^4 z + 1)(1+\tan^2 z)} \overset{\text{AM-GM}}{\leq}$$

$$\leq \frac{4\tan^4 z}{2\tan^2 z \cdot 2\tan z} = \tan z$$

$$\tan x \leq \tan z \Rightarrow x \leq z \tag{3}$$

By (1);(2);(3):

$$z \leq y \leq x \leq z \Rightarrow x = y = z$$

$$2\sin^2 x = \tan x; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2\sin x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Solution: $x = y = z = \frac{\pi}{4}$ $\square$

Solution 2 by Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Tomando las nuevas variables $u = \tan x, v = \tan y$ y $w = \tan z$ y considerando las funciones

$$f_n(t) = \frac{nt^n}{1+t^2+t^4+\ldots+t^{2(n-1)}}, \qquad n \in \mathbb{N} \text{ y } t > 0,$$

el sistema propuesto se transforma en

$$f_2(u) = v, \qquad f_3(v) = w, \qquad f_4(w) = u.$$

Por la desigualdad entre las medias aritmeética y geométrica,

$$f_n(t) \leq \frac{t^n}{1 \cdot 2^{\frac{2}{n}} \cdot t^{\frac{4}{n}} \dots t^{\frac{2(n-1)}{n}}} = \frac{t^n}{t^{n-1}} = t = f_1(t),$$

donde la igualdad ocurre si y solo si $1 = t^2 = \dots = t^{2(n-1)}$; es decir, si y solo si $t - 1$. Así,

$$u = f_4(w) \leq w = f_3(v) \leq v = f_2(u) \leq u,$$

y con la igualdad ocurriendo si y solo si $u = v = w = 1$, lo que es equivalente a $x = y = z = \frac{\pi}{4}$, por se $x, y, z \in (0, \frac{\pi}{2})$. Puesto que los extremos de la cadena de disigualdades anterior son iguales, se trata de una cadena de igualdades y la única solución del sistema es $x = y = z = \frac{\pi}{4}$. $\square$

Mathematics Department, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu - Severin, Mehedinti, Romania

Email address: `dansitaru63@yahoo.com`